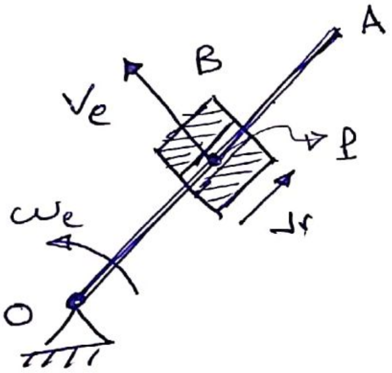
الحركة المركبة للجسيمات

تعريف: هي حركة جسيم بالنسبة الى جسم صلب آخر متحرك.

مثال: حركة كرة على سطح قارب متحرك فحركة الكرة مركبة بالنسبة لمشاهد يقف على الشاطئ
فحركة الكرة بالنسبة لسطح القارب هي حركة نسبية
بالاضافة لحركة القارب بالنسبة للشاطئ هي حركة مكتسبة بمعنى أنه في حال فرضنا الكرة لا تتحرك لاكتسبت حركة القارب او حركة النقطة التي تقع اسفل الجسيم من القارب في هذه اللحظة المدروسة

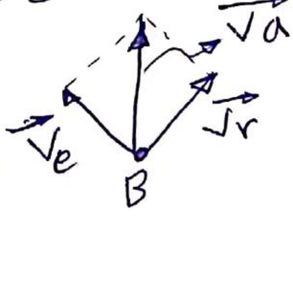


مثال آخر: حركة منزلقة B يتحرك على عارضة OA تتحرك حركة دورانية حول O بسرعة زاوية ω_e
فحركة المنزلقة على امتداد OA حركة نسبية ولها سرعة نسبية $\vec{V_r}$
ولها تسارع ايضاً نسبي $\vec{a_r}$
وفي نفس الوقت العارضة تتحرك حركة دورانية حول O فلذلك سرعة النقطة P من العارضة تدعى بالسرعة المكتسبة $\vec{V_e}$ أي $\vec{V_e}=\vec{V_P}=\vec{\omega_e}\wedge\vec{OP}$

$v_P = v_e = \omega \cdot OP =$

عندئذ سرعتها المطلقة $\vec{V_a}=\vec{V_B}$ تساوي الى المجموع الهندسي للسرعتين

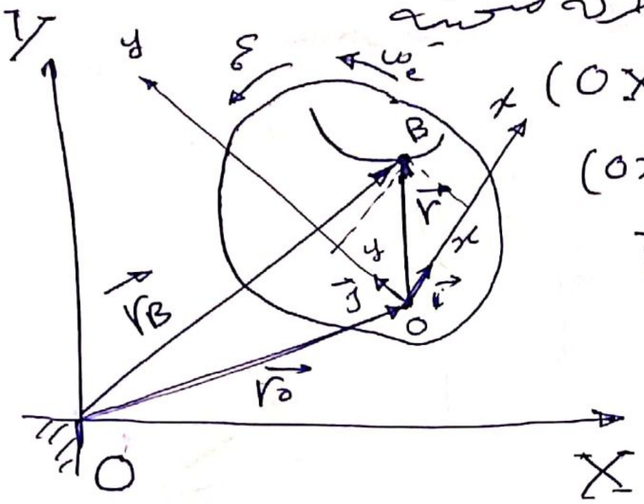
$$\vec{V_a}=\vec{V_B}=\vec{V_e}+\vec{V_r}$$



②

استنتاج المعادلة العامة للسرعة والتسارع في الحركة المركبة

نفترض ان الجسم الصلب يتحرك حركة مستوية عامة والجسم B يتحرك على سطح هذا الجسم حركة منحنية



- نأخذ مجموعة احداثيات ثابتة (OXY)
- نأخذ مجموعة احداثيات متحركة (oxy)

نحدد موضع الجسم B بشعاع الموضع $\vec{r}_B$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_o + \vec{r}$$

حيث: $\vec{r}_o$ شعاع الموضع للقطب O المختار حيث سرعته معلومة $\vec{v}_o$ وتسارعه ايضاً $\vec{a}_o$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ شعاع الموضع للجسم B بالنسبة للقطب وهذا الشعاع متغير اثناء الحركة في الطويلة والمنحى والاتجاه نتيجة الحركة النسبية للجسم B.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_o + x\vec{i} + y\vec{j}$$

لايجاد السرعة نشتق شعاع الموضع $\vec{r}_B$

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j})}{dt}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_o + \dot{x}\vec{i} + x(\vec{\omega}_e \wedge \vec{i}) + \dot{y}\vec{j} + y(\vec{\omega}_e \wedge \vec{j})$$

ملاحظة:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_o + \underbrace{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}}_{\vec{V}_r} + \vec{\omega}_e \wedge (\underbrace{x\vec{i} + y\vec{j}}_{r})$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_o + \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \wedge \vec{r} = \vec{V}_o + \vec{V}_{P/o} + \vec{V}_r$$

حيث: $\vec{V}_{P/o} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{r}$ سرعة النقطة P من الجسم الصلب بالنسبة للقطب O كما في الحركة المستوية العامة

3

وهذه النقطة P تقع اسفل النقطة B في هذه اللحظة المدروسة $\vec{V_e} = \vec{V_P} = \vec{V_O} + \vec{V_{P/O}}$ وهذا المتجه يعبر عن حركة النقطة P بالنسبة للاحداثيات الثابتة وهي الحركة المكتسبة $\vec{V_e}$ بالنتيجة حركة الجسم المطلقة :

$$\boxed{\vec{V_a} = \vec{V_B} = \vec{V_e} + \vec{V_r}}$$

التسارع

$$\vec{a_a} = \vec{a_B} = \frac{d\vec{V_a}}{dt} = \frac{d\vec{V_o}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega_e} \wedge \vec{r})}{dt} + \frac{d\vec{V_r}}{dt}$$

(1) (2) (3)

نقوم باشتقاق كل حد ثم نجمع النتائج

(1) تسارع القطب O

$$\frac{d\vec{V_o}}{dt} = \vec{a_o}$$

(2)

$$\frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega_e} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

عند اشتقاق الحركة تبين لدينا ان مشتق $\vec{r}$ هو:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V_r} + \vec{\omega_e} \wedge \vec{r}$$

لذلك :

$$\begin{aligned}
\frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt} &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega_e} \wedge (\vec{V_r} + \vec{\omega_e} \wedge \vec{r}) \\
&= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega_e} \wedge \vec{V_r} + \vec{\omega_e} \wedge (\vec{\omega_e} \wedge \vec{r}) \\
&= \vec{a^t_{P/O}} + \vec{\omega_e} \wedge \vec{V_r} + \vec{a^n_{P/O}} = \vec{a^t_{P/O}} + \vec{a^n_{P/O}} + \vec{\omega_e} \wedge \vec{V_r} \\
&= \boxed{\vec{a_{P/O}} + \vec{\omega_e} \wedge \vec{V_r}}
\end{aligned}$$

$$\vec{a_{P/O}} = \vec{a^t_{P/O}} + \vec{a^n_{P/O}}$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j})}{dt} = \underbrace{\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}}_{a_r} + \dot{x}(\vec{\omega}_e \wedge \vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega}_e \wedge \vec{j})$$

$$= \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \wedge (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \boxed{\vec{a}_r + \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r}$$

نجمع النتائج للحصول على التسارع المطلق:

$$a_a = \overbrace{\vec{a}_o + \vec{a}_{p/o}}^{a_p} + \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r + \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$$

$$= \vec{a}_p + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r)$$

حيث: $\vec{a}_p$ تسارع النقطة P من الجسم الصلب بالنسبه للاحداثيات الثابته وهو التسارع المكتسب $\vec{a}_e$

$\vec{a}_r$ التسارع النسبي

$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ وهو التسارع المتمم او ما يدعى بتسارع كوريوليس $\vec{a}_c$ نسبه للعالم الفرنسي

$$\boxed{a_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c}$$

تسارع كوريوليس $\vec{a}_c$ وهو يبين التغير في السرعة النسبيه نتيجه الحركة الدورانيه المكتسبه مما يؤدي الى تغير متجه شعاع السرعة النسبيه

وايضا يبين التغير في السرعة المكتسبه نتيجه الحركة النسبيه وتغير موضع الجسم B

بسبب هذه التغيرات ينشأ تسارع كوريوليس او التسارع المتمم

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$$

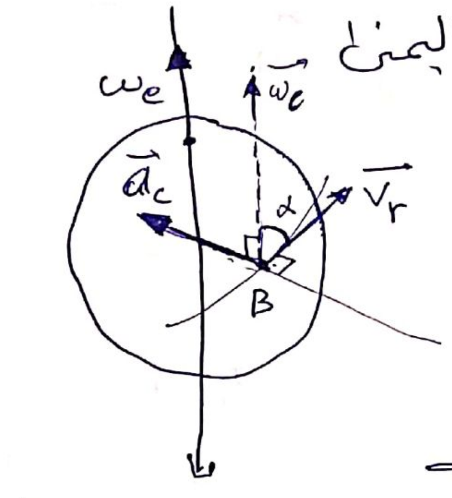
طويلة شعاع كوريوليس

$$a_c = 2\,\omega_e \cdot v_r \cdot \sin\alpha$$

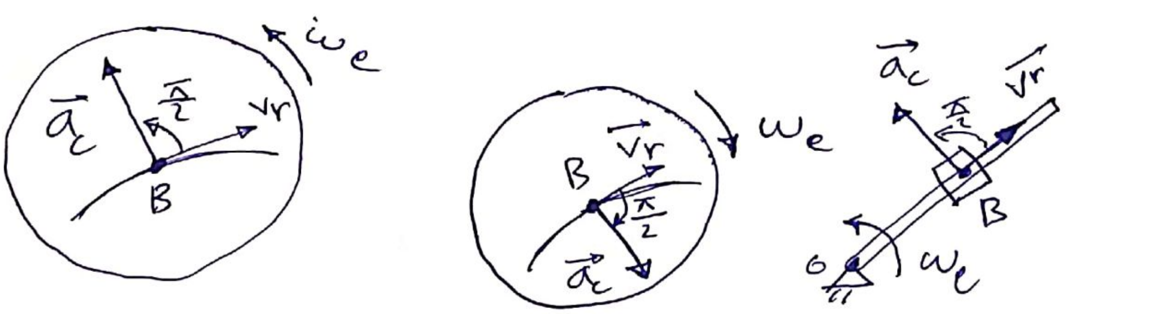
حيث: $\hat{\alpha}$ = الزاويه بين متجه السرعة الزاويه للجسم $\vec{\omega}_e$
او السرعة الزاويه المكتسبة ومتجه السرعة النسبية $\vec{V}_r$

منحى تسارع $\vec{a}_c$ عامودي على كل من متجه السرعة الزاويه $\vec{\omega}_e$ و $\vec{V}_r$

اتجاه تسارع $\vec{a}_c$ حسب قاعدة اليد اليمنى.



وفي حال كانت الزاويه $\alpha = \frac{\pi}{2}$
وهذا يكون دائماً عندما تكون ~~الزاويه المكتسبة~~ حركة الجسم الصلب حركة مستويه عامه عندئذ يكون متجه $\vec{a}_c$ عامودي على السرعة النسبيه واتجاهه يحدد عن طريق تدوير متجه السرعة النسبيه $\vec{V}_r$ بزاويه $\frac{\pi}{2}$ مع دوران السرعة الزاويه ω_e



ينعدم تسارع كوريوليس:

١- في حال $\vec{V}_r = \vec{0}$

٢- = = = $\vec{\omega}_e = \vec{0}$ حركة انسحابيه للجسم الصلب او انسحابيه لحظية

٣- = = = $\hat{\alpha} = 0$ كما في الشكل: